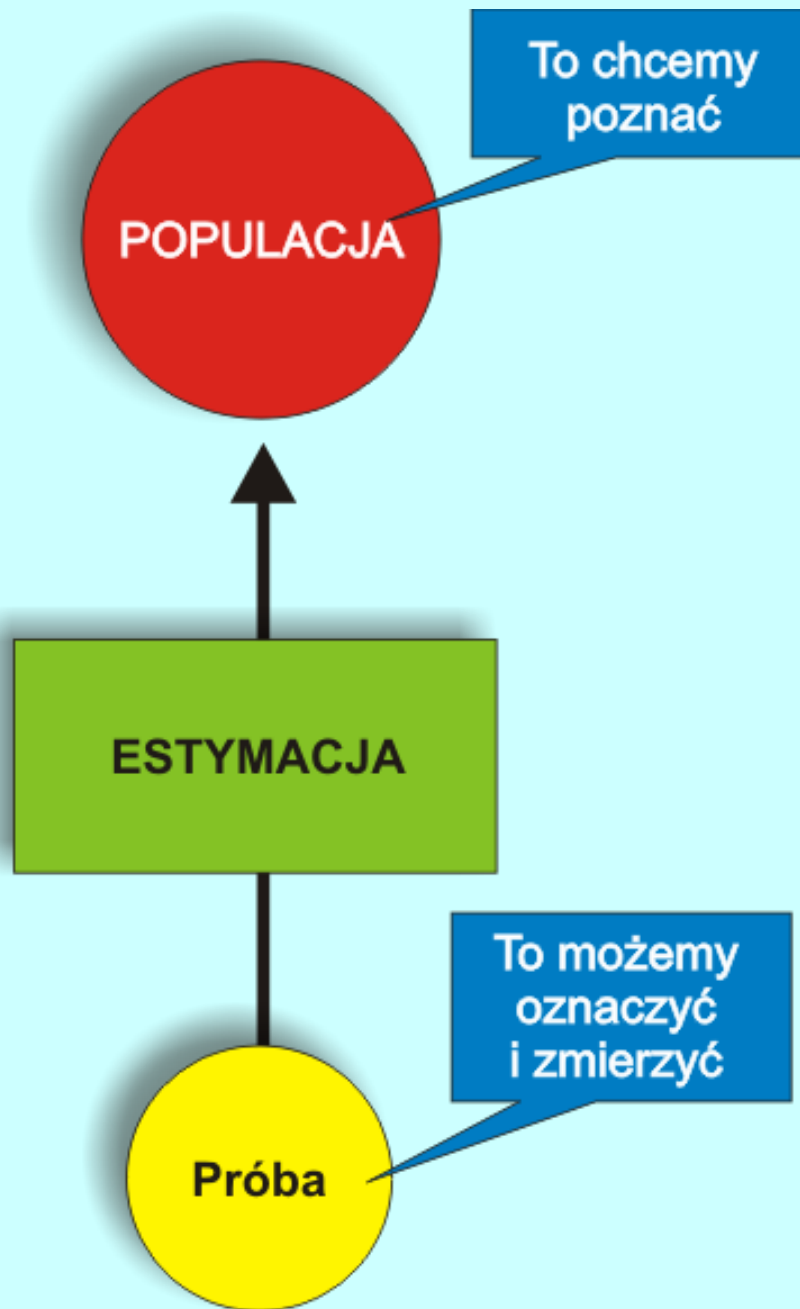


# **Weryfikacja hipotez statystycznych**

**STATYSTYKA**



# WNIOSKOWANIE STATYSTYCZNE

- **ESTYMACJA** – oszacowanie z pewną dokładnością wartości opisującej rozkład badanej cechy statystycznej.
- **WERYFIKACJA HIPOTEZ** – sprawdzanie słuszności przypuszczeń dotyczących postaci rozkładu cechy statystycznej lub wartości jego parametrów.

- PRZEDZIAŁ UFNOŚCI – określa prawdopodobny zasięg odchylenia wyliczeń od wartości rzeczywistej.
- POZIOM UFNOŚCI – prawdopodobieństwo otrzymania przedziału niezawierającego estymowanego parametru.

Zmienna	N ważnych	Średnia	Ufność -95,000%	Ufność 95,000	Mediana	Minimum	Maksimum	Odch.std	Wsp.zmn.	Skośność	Kurtoza
ZGIĘCIE_PRZED	15	77,13333	69,03257	85,23410	75,00000	40,00000	100,0000	14,62809	18,96468	-0,851270	1,925613
ZGIĘCIE_PO	15	79,40000	71,74144	87,05856	78,00000	45,00000	100,0000	13,82957	17,41760	-0,765534	1,757399

# Hipoteza statystyczna

Jest to każde przypuszczenie dotyczące zbiorowości generalnej, nie poparte wcześniejszym przeprowadzeniem stosownych badań.

## Podział hipotez statystycznych:

- **Hipotezy parametryczne** – dotyczące poziomu parametrów charakteryzujących populację generalną, takich jak wartość średnia czy wskaźniki struktury,
- **Hipotezy nieparametryczne** – dotyczące kształtu rozkładu cechy statystycznej, współzależności pomiędzy cechami czy losowości próby.

# Pojęcia związane z weryfikacją hipotez statystycznych

- **hipoteza zerowa ( $H_0$ )** – jest to hipoteza sprawdzana, zakładająca brak jakiejkolwiek różnicy pomiędzy ocenami z próby losowej a parametrami lub rozkładami w populacji generalnej,
- **hipoteza alternatywna ( $H_1$ )** – jest to hipoteza, którą jesteśmy skłonni przyjąć w przypadku odrzucenia  $H_0$ . Można ją zatem rozumieć jako wszystkie pozostałe i możliwe założenia, poza weryfikowaną hipotezą zerową,
- **test statystyczny** – reguła postępowania, która przyporządkowuje wynikom próby losowej decyzję przyjęcia (uznania za prawdziwą) lub odrzucenia (uznania za nieprawdziwą) hipotezy zerowej,
- **błąd I rodzaju** – polega na odrzuceniu hipotezy zerowej w przypadku gdy jest ona prawdziwa,
- **błąd II rodzaju** – polega na przyjęciu hipotezy zerowej w przypadku, gdy jest ona nieprawdziwa,
- **poziom istotności ( $\alpha$ )** – prawdopodobieństwo dopuszczalnej częstości wystąpienia wyników niezgodnych z przyjętymi założeniami na skutek losowego charakteru próby,
- **liczba stopni swobody ( $df$ )** – liczba określająca, ile zmiennych w próbie możemy zmienić, nie zmieniając przy tym ich sumy oraz wartości obliczanych parametrów.

# Etapy postępowania w przypadku parametrycznych testów istotności

1. Sformułowanie hipotezy zerowej ( $H_0$ ) i hipotez alternatywnych.
2. Wybór testu do weryfikacji hipotezy zerowej (wyboru dokonuje się na podstawie liczebności próby oraz rodzaju hipotezy zerowej).  
Przy  $n \leq 30$  stosowany jest test t-Studenta, przy  $n > 30$  stosowany jest test z.
3. Wyznaczenie poziomu istotności (najczęściej spotykane to 0,05; 0,01).
4. Wyznaczenie wartości funkcji testu istotności (przeprowadzenie właściwych obliczeń).
5. Odczytanie wartości krytycznej funkcji testu (z tablic statystycznych) przy danym poziomie  $\alpha$ .
6. Podjęcie z określonym prawdopodobieństwem decyzji o przyjęciu lub odrzuceniu hipotezy zerowej:
  - dla testów t – hipotezę  $H_0$  odrzucamy z prawdopodobieństwem  $\alpha$  w przypadku, gdy  $|t| > t_\alpha$ ,
  - dla testów z – hipotezę  $H_0$  odrzucamy z prawdopodobieństwem  $\alpha$  w przypadku, gdy  $|z| > z_\alpha$ .

# Test dla średnich populacji generalnej

- stosowany do porównania średniej arytmetycznej próby z wartością średniej arytmetycznej z populacji generalnej -

- a) porównanie wartości średniej arytmetycznej próby małej ( $n < 30$ ) ze średnią arytmetyczną populacji generalnej

$$t = \frac{|\bar{x} - m|}{Sd} \cdot \sqrt{n-1}$$

gdzie:

$m$  – średnia populacji generalnej,

$\bar{x}$  – średnia arytmetyczna próby,

$Sd$  – odchylenie standardowe,

$n$  – liczebność próby.

- b) porównanie wartości średniej arytmetycznej próby dużej ( $n > 30$ ) ze średnią arytmetyczną populacji generalnej

$$z = \frac{|\bar{x} - m|}{Sd} \cdot \sqrt{n}$$



## Przykład Nr 1

Na podstawie badań ogólnopolskich wyznaczono normy sprawności ogólnej dla młodych piłkarzy nożnych zakładające, że minimum kwalifikujące poszczególnych zawodników do „typowych” wynosi 110 pkt. (łączny rezultat uzyskany na podstawie specjalnej baterii testów motorycznych). Badania przeprowadzone na młodych piłkarzach ( $n=23$ ) w szkółce piłkarskiej wykazały, że typowy młodzik uzyskał  $114 \pm 6,2$  pkt.

Na podstawie powyższych danych należy zweryfikować hipotezę zerową zakładającą zgodność poziomu rezultatów testu sprawnościowego typowych młodzików szkółki z badaniami ogólnopolskimi (poziom istotności  $\alpha = 0,05$ ).

### 1. Sformułowanie $H_0$ oraz $H_1$ :

$H_0: x_1 = x_2$  – nie ma różnicy w poziomie rezultatów testu sprawnościowego młodzików ze szkółki i wyników z badań ogólnopolskich.

$H_1: x_1 \neq x_2$  – rezultaty testu sprawnościowego młodzików ze szkółki różnią się w sposób istotny statystycznie od wyników badań ogólnopolskich.

### 2. Wyznaczenie wartości funkcji testu:

$$t = \frac{|114 - 110|}{6,2} \cdot \sqrt{23 - 1} = 3,03$$

Wartość krytyczna statystyki rozkładu t-Studenta dla  $\alpha = 0,05$  i  $df = 22$  wynosi 2,074.

**Interpretacja:** Ponieważ  $|t| > t_\alpha$ , z prawdopodobieństwem 0,95 odrzucamy hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej.

**Grupa młodzików ze szkółki piłkarskiej uzyskała więc rezultaty różniące się w sposób istotny statystycznie od badań ogólnopolskich.**

# Test $t$ oraz test $z$ dla dwóch średnich (próby niezależne)

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

$\bar{x}_1$  – średnia pierwszej grupy,  
 $\bar{x}_2$  – średnia drugiej grupy,  
 $n_1$  – liczebność pierwszej grupy,  
 $n_2$  – liczebność drugiej grupy,  
 $s_1^2$  – wariancja w pierwszej grupie,  
 $s_2^2$  – wariancja w drugiej grupie.

Liczba stopni swobody (df)

$$df = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) = n_1 + n_2 - 2$$

# Przykład obliczeń testu t dla danych niezależnych

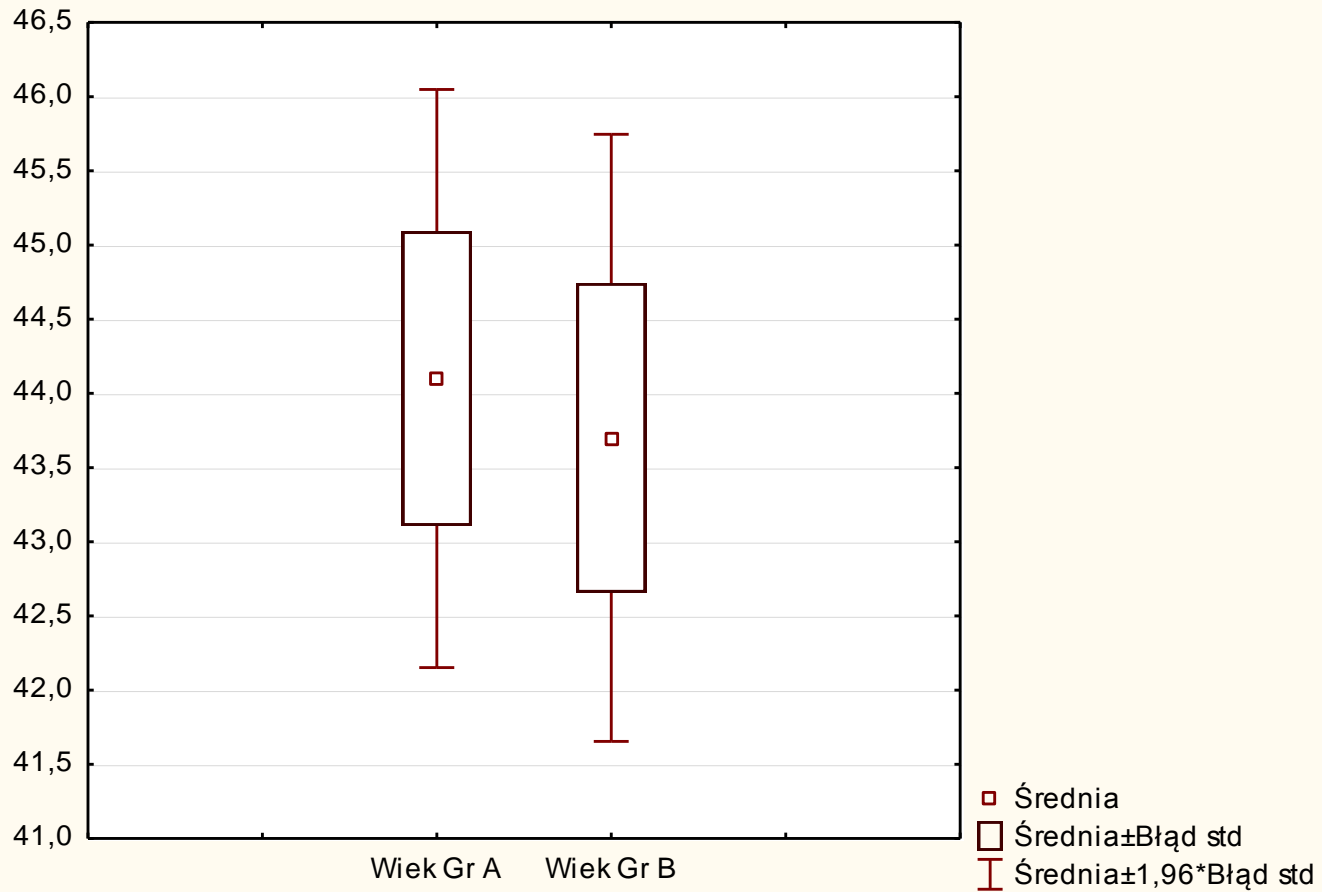
L.p	Wiek Gr A	Wiek Gr B
1	38	49
2	47	46
3	46	45
4	41	42
5	42	41
6	47	39
7	48	41
8	43	47
9	45	46
10	44	41

stopnie swobody	Alfa $\alpha$		
	0,01	0,05	0,10
16	2,9208	2,1199	1,7459
17	2,8982	2,1098	1,7396
18	2,8784	2,1009	1,7341
19	2,8609	2,0930	1,7291
20	2,8453	2,0860	1,7247

Ponieważ wartość testu t jest mniejsza od wartości krytycznej odczytanej z tablic nie ma podstaw do odrzucenia  $H_0$

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} = \frac{44,1 - 43,7}{\sqrt{\frac{10 \cdot 8,88 + 10 \cdot 11,09}{10 + 10 - 2} \cdot \left( \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \right)}} = \frac{0,4}{\sqrt{\frac{199,7}{18} \cdot \left( \frac{2}{10} \right)}} = \frac{0,4}{\sqrt{11,09 \cdot 0,2}} = 0,27$$

Wykres ramka-wąsy  
Wiek Gr A wz. Wiek Gr B



Testy dla prób niezależnych (Arkusz3)

Uwaga: Zmienne traktowane są jako niezależne próby.

Grupa 1 wz. Grupy 2	Średnia Grupa 1	Średnia Grupa 2	t	df	p	N ważnych Grupa 1	N ważnych Grupa 2	Odch.std Grupa 1	Odch.std Grupa 2	iloraz F Wariancje	p Wariancje
Wiek Gr A vs. Wiek Gr B	44,10000	43,70000	0,277498	18	0,784559	10	10	3,142893	3,301515	1,103487	0,885780

# Test $t$ dla dwóch średnich (próby zależne)

$$t = \frac{\bar{d}}{s_d} \cdot \sqrt{n-1}$$

- $\bar{d}_1$  – średnia różnic między wynikami uzyskanymi przez badanych w dwóch sytuacjach (np. Przed i Po eksperymencie),
- $n$  – liczba elementów w próbie,
- $s_d$  – odchylenie standardowe rozkładu różnic pomiędzy pierwszym a drugim pomiarem.

Liczba stopni swobody (df)

$$df = n - 1$$

# Tabela pomocnicza do obliczenia testu t dla danych zależnych

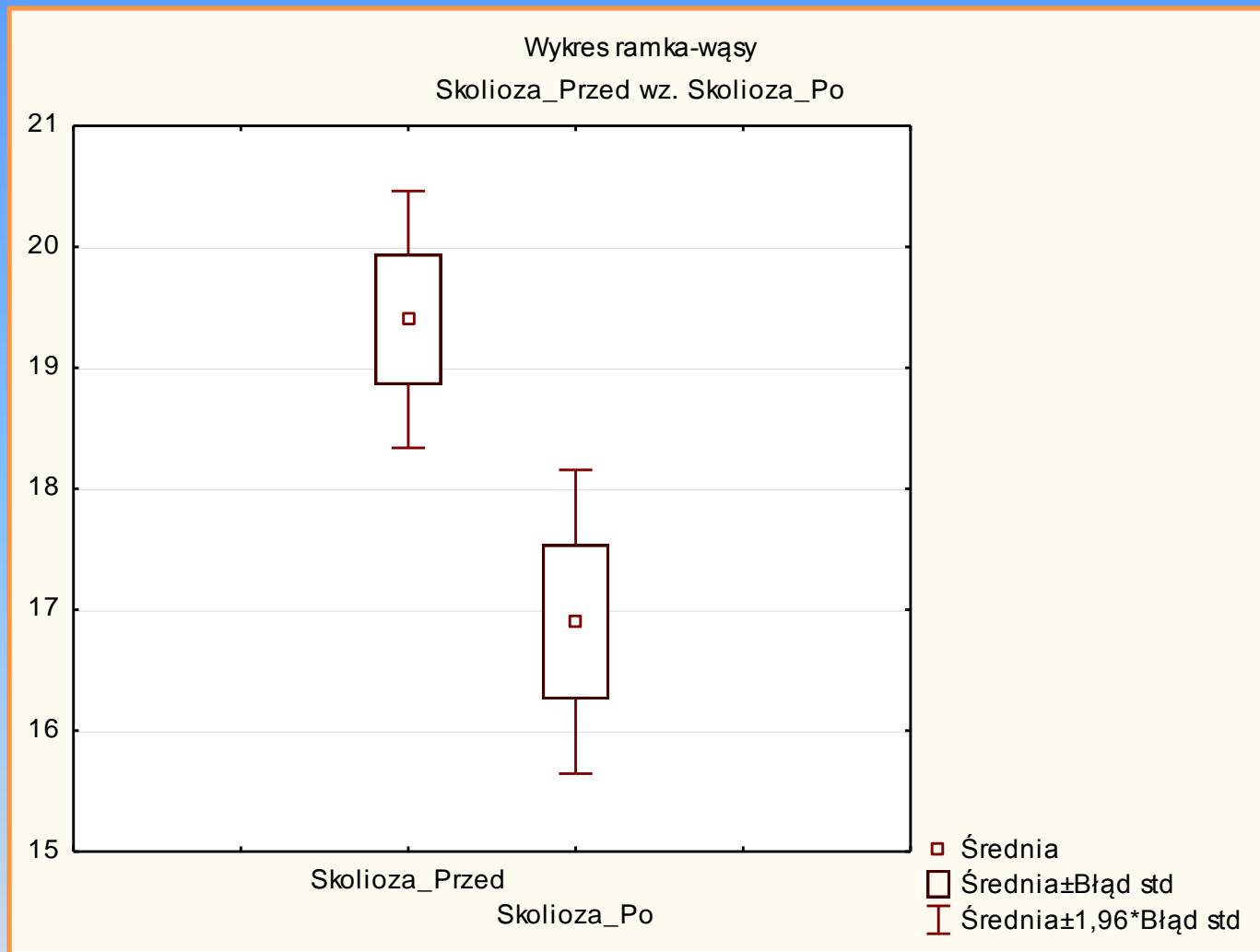
Inicjały	Grupa	Skolioza Przed	Skolioza Po	$d_i$ różnica pomiarów	$(d_i - \bar{d})$	$(d_i - \bar{d})^2$
AA	A	18	19	18-19=-1	-1-2,5=-3,5	12,25
BB	A	19	19	19-19=0	0-2,5=-2,5	6,25
CC	A	20	18	20-18=2	2-2,5=-0,5	0,25
DD	A	22	19	22-19=3	3-2,5=0,5	0,25
EE	A	18	15	18-15=3	3-2,5=0,5	0,25
FF	A	17	14	17-14=3	3-2,5=0,5	0,25
GG	A	20	18	20-18=2	2-2,5=-0,5	0,25
HH	A	18	17	18-17=1	1-2,5=-1,5	2,25
II	A	20	14	20-14=6	6-2,5=3,5	12,25
JJ	A	22	16	22-16=6	6-2,5=3,5	12,25
SUMA				25		=46

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2}{n}} = \sqrt{\frac{46}{10}} = \sqrt{4,6} = 2,14$$

$$t = \frac{\bar{d}}{s_d} \cdot \sqrt{n-1} = \frac{2,5}{2,14} \cdot \sqrt{10-1} = 1,17 \cdot 3 = 3,51$$

stopnie swobody	Alfa $\alpha$		
	0,01	0,05	0,10
6	3,7074	2,4469	1,9432
7	3,4995	2,3646	1,8946
8	3,3554	2,3060	1,8595
9	3,2498	2,2622	1,8331
10	3,1693	2,2281	1,8125

Hipotezę zerową ( $H_0$ ) odrzucamy z prawdopodobieństwem 0,05, kiedy wartość testu  $t$  jest większa od wartości krytycznej odczytanej z tablic rozkładu  $t$  ( $t > t_\alpha$ ).  
 Jak widać w przykładzie po lewej, mamy podstawy do odrzucenia  $H_0$



Test T dla prób zależnych (Arkusz6)										
Zaznaczone różnice są istotne z $p < ,05000$										
Zmienna	Średnia	Odch.st.	Ważnych	Różnica	Odch.st. Różnica	t	df	p	Ufność -95,000%	Ufność +95,000%
Skolioza_Przed	19,40000	1,712698								
Skolioza_Po	16,90000	2,024846	10	2,500000	2,273030	3,478042	9	0,006960	0,873972	4,126028



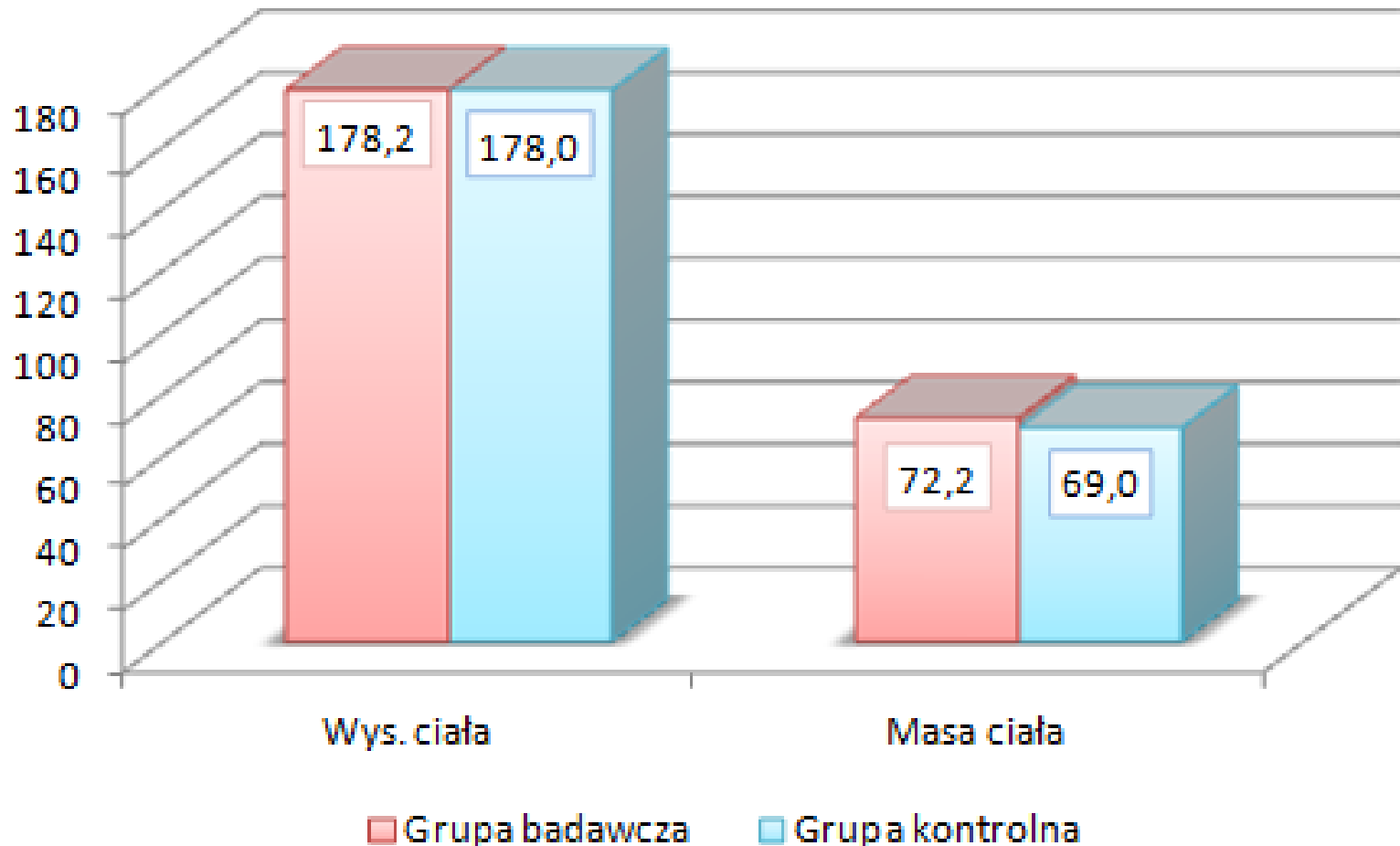
# STABILIZACJA CENTRALNA KRĘGOSŁUPA

Lp.	GRUPA	WIEK	WYS. CIAŁA	MASA CIAŁA	STABIL. TYŁEM (PRZED)	STABIL. TYŁEM (PO)	WYRZUT Z AUTU (PRZED)	WYRZUT Z AUTU (PO)	SZYBKOŚĆ_5 (PRZED)	SZYBKOŚĆ_5 (PO)	SZYBKOŚĆ_30 (PRZED)	SZYBKOŚĆ_30 (PO)	WYSK. DOS_ZZ (PRZED)	WYSK. DOS_ZZ (PO)
1	BADAWCZA	18	176	68,6	2	10	20,7	21	1,07	0,99	4,19	4,13	56,5	56
2	BADAWCZA	18	179	74,7	3	12	18,8	18,4	1,08	1,04	4,21	4,26	49,3	44,6
3	BADAWCZA	18	173	71,4	10	10	19	17,4	1,12	1,25	4,23	4,45	55	48,3
4	BADAWCZA	18	172	69,6	9	12	28,5	28,6	1,09	1,13	4,26	4,36	39	45,5
5	BADAWCZA	18	188	77,4	8	8	19,8	17,7	1,18	1,06	4,21	4,15	53,9	58
6	BADAWCZA	18	173	74,7	10	10	23,6	24	1,05	1,08	4,14	4,23	45	47,9
7	BADAWCZA	18	172	63,1	3	3	17	16,2	1,23	1,13	4,31	4,28	51,2	49,7
8	BADAWCZA	18	189	88,6	10	10	21	20	1,05	1,01	4,03	4,02	50,8	54,2
9	BADAWCZA	18	179	73,8	10	10	19,2	19,5	1,07	0,99	4,14	3,99	50,8	56,7
10	BADAWCZA	18	175	68	10	10	20,6	19,6	1,14	1,11	4,37	4,27	43,3	42,2
11	BADAWCZA	18	182	71,8	5	12	21,2	19,9	1,08	1,04	4,12	4,18	56,7	50,5
12	BADAWCZA	18	176	71,5	3	10	18	16,5	1,16	1,24	4,19	4,41	48,5	52,3
13	BADAWCZA	18	176	63,3	4	12	18,8	19,85	1,14	1,13	4,28	4,35	43,4	46,1
14	BADAWCZA	18	181	74	2	8	15,3	16,5	1,07	1,06	4,17	4,19	46,7	46,1
15	BADAWCZA	18	178	67,4	6	8	24,4	25,5	1,12	1,07	4,43	4,46	46,5	49,4
16	BADAWCZA	18	182	73,5	10	10	18,7	18,3	1,14	1,03	4,16	4,12	45,5	49,6
17	BADAWCZA	18	180	76,6	8	10	19,7	19,2	1,13	1,09	4,36	4,37	44,6	45
18	BADAWCZA	18	176	70,9	10	7	18,5	19,3	1,12	1,01	4,1	3,99	43,4	51,2
1	KONTROLNA	17	177	68	4	5	16,9	17,4	1,25	1,26	4,52	4,5	45,8	49,1
2	KONTROLNA	18	175	63	7	7	19,3	18,5	1,2	1,19	4,4	4,45	47,3	50
3	KONTROLNA	18	177	65	3	5	23,7	23,5	1,42	1,5	4,76	4,74	44,3	46,4
4	KONTROLNA	17	175	65	2	4	19,9	20,6	1,22	1,22	4,42	4,39	48,3	51,5
5	KONTROLNA	18	189	74	2	3	17,7	18,9	1,23	1,19	4,64	4,65	36,5	40,5
6	KONTROLNA	17	179	73	10	7	17,7	18,4	1,2	1,23	4,48	4,52	42,7	45,8
7	KONTROLNA	17	181	64,2	5	3	19,6	18,55	1,23	1,13	4,36	4,27	43,8	48,2
8	KONTROLNA	18	172	65,6	10	8	19	19,5	1,25	1,22	4,45	4,47	51,2	54,8
9	KONTROLNA	18	175	70	8	7	17,3	16,2	1,22	1,26	4,58	4,57	39,3	41,9
10	KONTROLNA	18	181	80,7	10	6	23,9	25,4	1,05	1,03	4,23	4,13	43,4	47,9
11	KONTROLNA	18	178	71	7	7	16,8	16,7	1,25	1,19	4,41	4,48	50,7	54,1
12	KONTROLNA	18	175	69	10	6	21,5	22	1,08	1,1	4,19	4,21	47,1	48,8
13	KONTROLNA	17	174	69	5	5	17	16,3	1,32	1,4	4,55	4,6	43,7	46,5
14	KONTROLNA	18	178	69,4	8	6	18,5	18,4	1,2	1,21	4,49	4,53	37,8	39,8
15	KONTROLNA	17	177	75	2	5	23,9	22,1	1,12	1,15	4,47	4,47	44,1	47,5
16	KONTROLNA	18	178	68,7	5	6	13,6	13,5	1,3	1,32	4,6	4,58	42,1	45,2
17	KONTROLNA	17	187	66,4	4	7	16,7	17	1,27	1,16	4,7	4,6	34,6	36
18	KONTROLNA	17	176	64,6	10	8	16,2	15,6	1,16	1,09	4,41	4,3	42,8	47,3

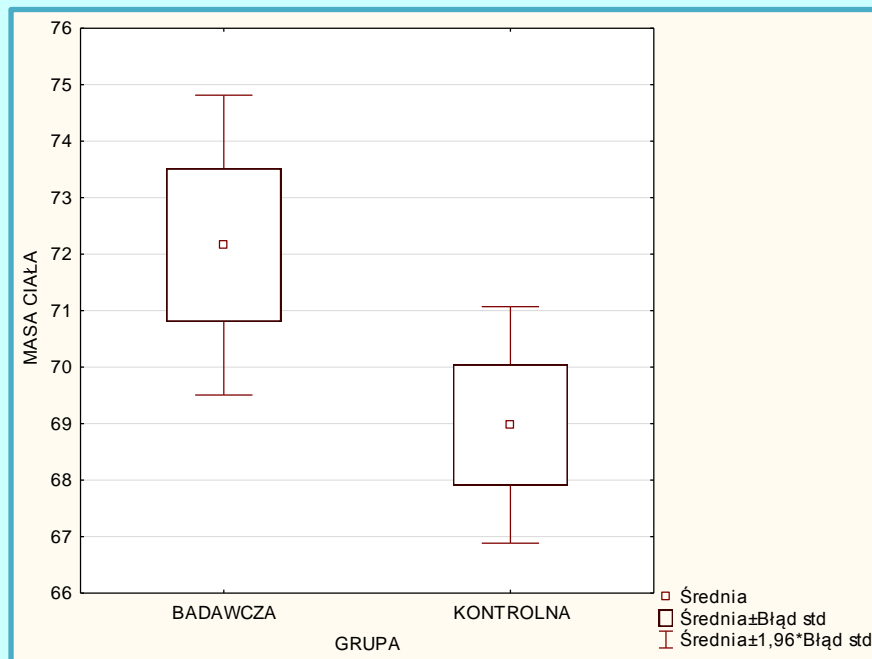
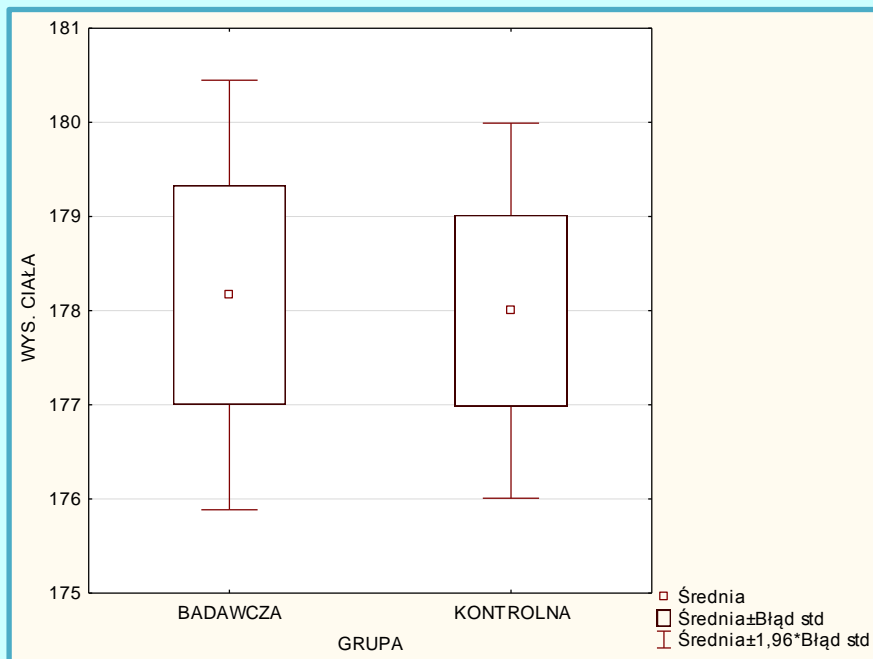
# Statystyka opisowa

Badane cechy	Grupa	J.m.	$\bar{x}$	s	V	As	Ku
WYS. CIAŁA	B	cm	178,17	4,94	2,77	0,85	0,35
MASA CIAŁA	B	kg	72,16	5,74	7,96	1,06	2,91
STABIL. TYŁEM (PRZED)	B	°	6,83	3,26	47,68	-0,36	-1,72
STABIL. TYŁEM (PO)	B	°	9,56	2,20	23,05	-1,55	2,99
WYRZUT Z AUTU (PRZED)	B	m	20,16	2,98	14,79	1,32	2,77
WYRZUT Z AUTU (PO)	B	m	19,86	3,24	16,33	1,48	2,18
SZYBKOŚĆ_5 (PRZED)	B	s	1,11	0,05	4,31	0,72	0,44
SZYBKOŚĆ_5 (PO)	B	s	1,08	0,07	6,94	1,05	0,82
SZYBKOŚĆ_5-30 (PRZED)	B	s	3,19	0,10	3,05	0,40	0,85
SZYBKOŚĆ_5-30 (PO)	B	s	3,16	0,11	3,41	0,33	0,23
WYSK. DOS_ZZ (PRZED)	B	cm	48,34	5,05	10,45	0,18	-0,75
WYSK. DOS_ZZ (PO)	B	cm	49,63	4,48	9,02	0,38	-0,62
WYS. CIAŁA	K	cm	178,00	4,31	2,42	1,42	2,03
MASA CIAŁA	K	kg	68,98	4,53	6,57	1,03	1,16
STABIL. TYŁEM (PRZED)	K	°	6,22	3,04	48,86	-0,01	-1,50
STABIL. TYŁEM (PO)	K	°	5,83	1,50	25,80	-0,50	-0,42
WYRZUT Z AUTU (PRZED)	K	m	18,84	2,86	15,19	0,54	-0,12
WYRZUT Z AUTU (PO)	K	m	18,81	2,99	15,90	0,57	0,19
SZYBKOŚĆ_5 (PRZED)	K	s	1,22	0,09	7,03	0,06	1,16
SZYBKOŚĆ_5 (PO)	K	s	1,21	0,11	9,16	0,99	1,68
SZYBKOŚĆ_5-30 (PRZED)	K	s	3,25	0,09	2,80	0,08	-0,59
SZYBKOŚĆ_5-30 (PO)	K	s	3,25	0,10	3,09	0,28	0,38
WYSK. DOS_ZZ (PRZED)	K	cm	43,64	4,53	10,38	-0,29	-0,16
WYSK. DOS_ZZ (PO)	K	cm	46,74	4,83	10,33	-0,50	0,33

# Weryfikacja jednorodności badanych grup...?



$H_0$ : grupy nie różnią się pod względem masy i wysokości ciała;  
 $H_1$ : grupy różnią się pod względem masy i wysokości ciała;

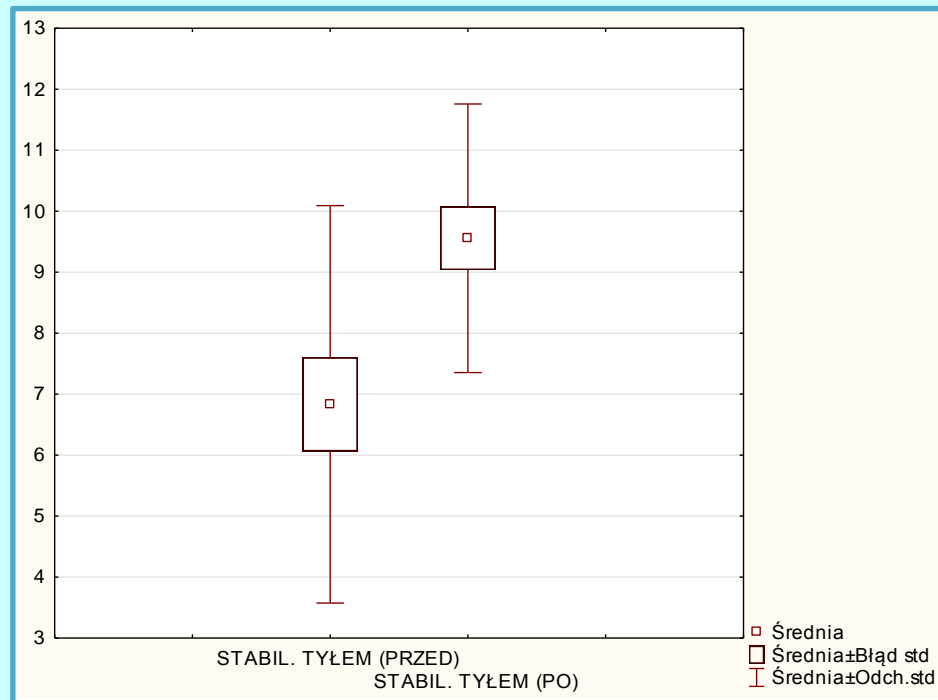


Parametr	Średnia Gr. badawcza	Średnia Gr. kontrolna	Wartość testu t	Wartość p
Wysokość ciała	178,17	178,00	0,11	0,91
Masa ciała	72,16	68,98	1,85	0,07

# Wpływ treningu stabilizacji centralnej kręgosłupa na parametry stabilizacji tyłem

$H_0$ : poziom stabilizacji tyłem oceniany przed treningiem nie różni się od poziomu stabilizacji tyłem ocenianej po zakończeniu serii treningów;

$H_1$ : poziom stabilizacji tyłem ocenianej przed i po serii treningów różni się.

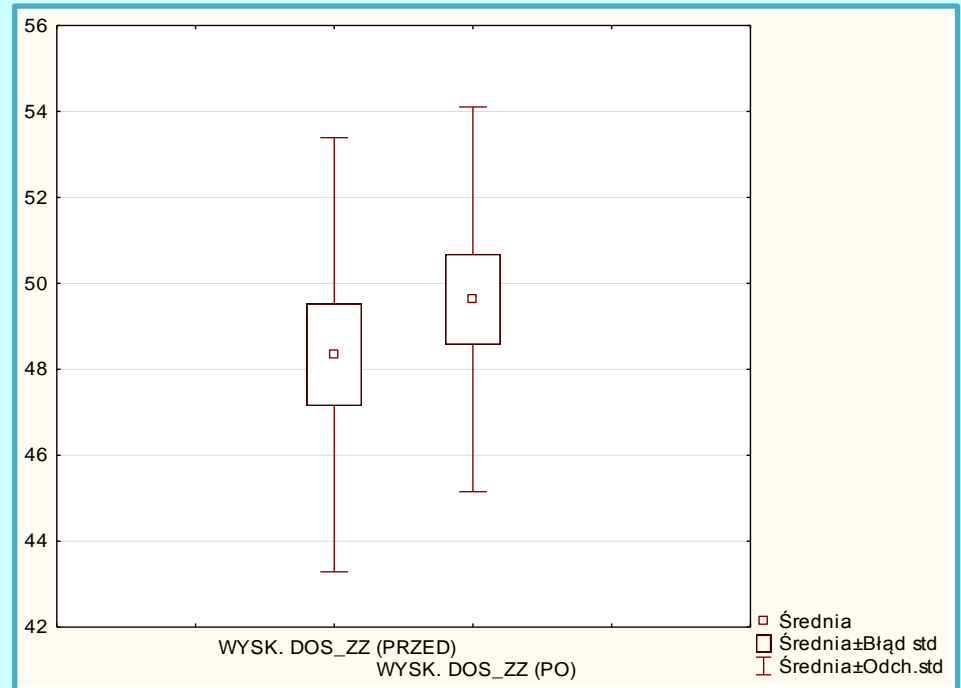


Parametr	Grupa	N - Ważnych	Wartość testu t	Wartość p
STABIL. TYŁEM (PRZED) vs. STABIL. TYŁEM (PO)	BADAWCZA.	18	<b>-3,10</b>	<b>0,006</b>
	KONTROLNA	18	0,74	0,469

# Wpływ treningu stabilizacji centr. kręg. na wysokość lotu z odbicia obunóż wykonywanego z zamachem

$H_0$ : parametry wysokości osiągniętego z zamachem ocenianego Przed i Po wprowadzeniu treningu stabilizacji centralnej kręgosłupa nie różnią się

$H_1$ : parametry wysokości osiągniętego ocenianego Przed i Po zakończeniu serii treningów różnią się.



Parametr	Grupa	N - Ważnych	Wartość testu t	Wartość p
WYSK. DOS_ZZ (PRZED) vs. WYSK. DOS_ZZ (PO)	BADAWCZA.	18	-1,30	0,21
	KONTROLNA	18	<b>-14,26</b>	<b>0,001</b>